

2024 Haziran Ayı Matematik Sorusunun Çözümü

Özel olarak 2'den farklı asal sayıların karelerinden oluşan kümeyi düşünelim. Bu küme

$$K = \{9, 25, 49, \dots\}$$

şeklindedir. P ise 2'den farklı asal sayıların kümesi olsun. Bu durumda her $p \in P$ için $p^2 = k$ olacak şekilde birebir eşlenen $k \in K$ vardır. k sayısının kendisi hariç tam bölenleri 1 ve p olduğundan ve P kümesinin elemanlarının hepsi tek sayı olduğundan $1 + p$ bir çift sayıdır. O halde K kümesinin elemanlarının hepsi birer Kocatepe sayısıdır. Şimdi P kümesinin sonsuz elemanlı olduğu gösterilirse bu kümenin elemanlarının karesinden oluşan K kümesinin de sonsuz elemanlı olduğu gösterilmiş olur. K kümesi Kocatepe sayılarından oluşan kümenin bir alt kümesi olduğundan K kümesinin sonsuz elemanlı olması Kocatepe sayılarının sonsuz elemanlı olması demektir. Bu durumda 2'den farklı asal sayıların sonsuz olduğunu göstermek yeterli olur. Asal sayıların sonsuzluğunun bir ispatı olan Öklid'in ispatını yapalım.

Varsayalım ki asal sayılar sonlu olsun ve n tane olsun. Bu asal sayılara da p_1, p_2, \dots, p_n diyelim. Yeni bir sayı tanımlayalım ve bu sayı $A = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ olsun. A sayısı bu asal sayıların hiçbirine bölünemez dolayısıyla A da bir asal sayıdır. Bu durumda A sayısı p_1, p_2, \dots, p_n asal sayılarından farklı bir asal sayıdır ve varsayım hatalıdır. O halde sonsuz tane asal sayı vardır.

Dikkat edilirse asal sayıların sonsuzluğundaki kanıtta $\{2\}$ elemanı da vardır fakat P kümesinde 2 elemanı yoktur. Ancak bu sonsuz tane olmasını değiştirmeyecektir çünkü sonsuz elemandan bir eleman çıkarırsanız yine sonsuz eleman kalacaktır.

Bir diğer ispat olarak benzer şekilde p , 2'den farklı asal sayı olmak üzere $2p$ sayısı da bir Kocatepe sayısı olacaktır. Çünkü kendisi hariç pozitif tam bölenleri 1, 2 ve p dir. $1 + 2 + p$ toplamı bir çift olur. Asal sayılar sonsuz olduğundan Kocatepe sayıları da sonsuz çokluktadır.